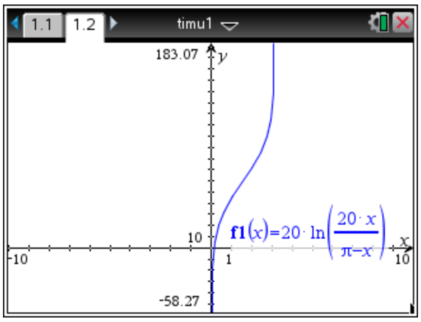
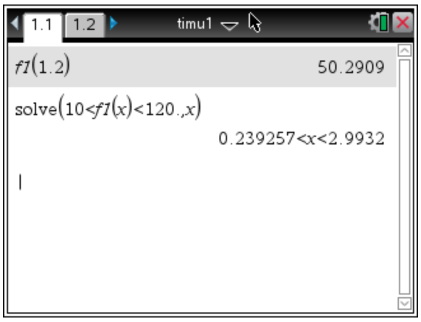
2015 年第四届 TI 数学创新思维解题大赛试题

参考答案

1．**解析：**输入函数表达式，作出图象，直接计算函数 f1(1.2)=50.2909

直接解不等式 10<f1(x)<120，得(0.239257，2.9932)





2. **解析：**由题设，仅有限个整点 P 满足题中的线性约束条件。可通过编程将每个 P 点逐一验证是否满足条件：$|PA|+|PB|\in \mathrm{Z}$ ，即可找出符合条件的所有整点 P .

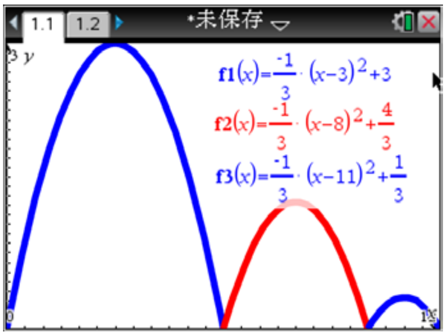
程序如下：

```
Define qzd()=
Prgm
n:=0
For x,1,300
For y,1,299-x
pa:= √ ((x+2)^(2)+y^(2))
pb:= √ ((x-2)^(2)+y^(2))
k:=pa+pb
r:=k-int(k)
If r=0 Then
n:=n+1
Disp "(",x,",",y,")"
   EndIf
EndFor
   EndFor
   Disp "共找到",n,"个解"
EndPrgm
```

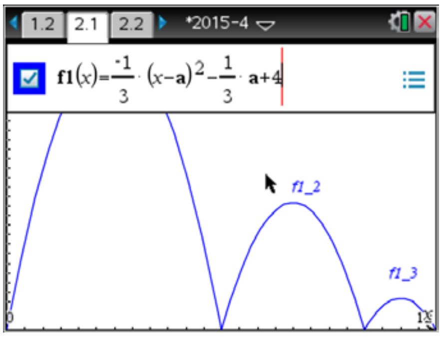
答案：$(2,3)$、$(7,12)$、$(26,45)$、$(97,168)$ 。

3. **解 析：** 这 一 族 图 象 由 三 个 二 次 函 数 图 象 组 成 ， 它 们 的 解 析 式 分 别 是

$f_1(x)=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$，$f_2(x)=-\frac{1}{3}(x-8)^2+\frac{4}{3}$，$f_3(x)=-\frac{1}{3}(x-11)^2+\frac{1}{3}$．当然，这还不能成为我们的答案．

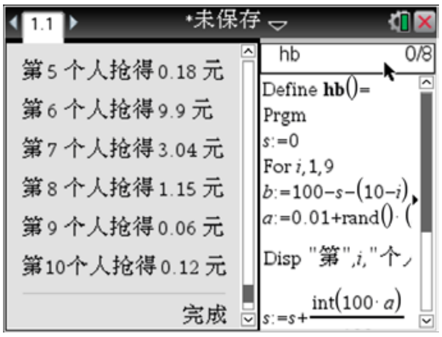


按试题求，需要构造一个含参数的函数解析式，通过给出参数的一组取值而得到这一族图象，所以将这三个函数解析式统一起来是关键．为此，考察三条抛物线的顶点，发现他们在一条直线上，且方程为 $y=-\frac{1}{3}x+4$，这样取参数 $a=\{3,8,11\}$ 作为抛物线的顶点横坐标，其纵坐标可以表示为 $-\frac{1}{3}a+4$，这样函数解析式就统一为 $f(x)=-\frac{1}{3}(x-a)^2-\frac{1}{3}a+4$，其中 $a=\{3,8,11\}$．



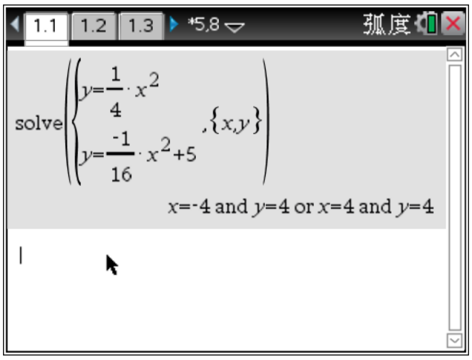
4. **解析**：试题要求编写一个生成 10 个随机数的程序，这 10 个随机数和为 100，且每个随机数都不能小于 0.01．程序的困难在于要确保随机生成的 10 个数和恰好为 100，这样前 9 个数的和就不能超过 99.99，为了保证每个数不小于 0.01，可以限制每个生成的随机数的范围，具体程序如下：

```
Define hb()=
Prgm
s:=0
For i,1,9
b:=100-s-(10-i)*0.01
a:=0.01+rand()*(b-0.01)
Disp "第",i,"个人抢得",int(100·s)/100,"元"
s:=s+int(100·s)/100
EndFor
Disp "第 10 个人抢得",int((100−s)·100)/100,"元"
EndPrgm
```



注：随机数命令 rand() 产生一个 $[0,1]$ 上的实数；生成一个区间 $[m,n]$ 上的随机数的算法语句是 $m+\text{rand}()\cdot(n-m)$.

5. **解析：** 求解方程组 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 和 $y=-\dfrac{1}{16}x^2+5$



作出函数 $y=\dfrac{1}{4}x^2, x\in[-4,4]$ 和 $y=-\dfrac{1}{16}x^2+5, x\in[-4,4]$ 的图象，并在 Y 轴上取

一点 A，再在曲线上任取一点 P，作点 P 关于点 A 的中心对称点 Q，作出 Q 点的轨迹，移动点 A 观察点 Q 的轨迹与曲线的交点情况.

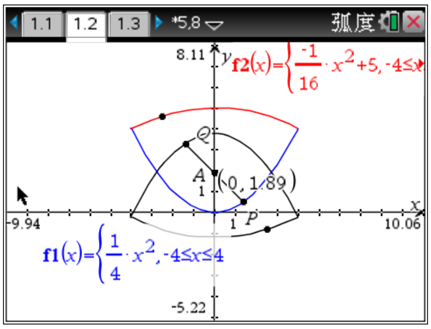
(1) 当$0<a<2.5$时，有一对好点；

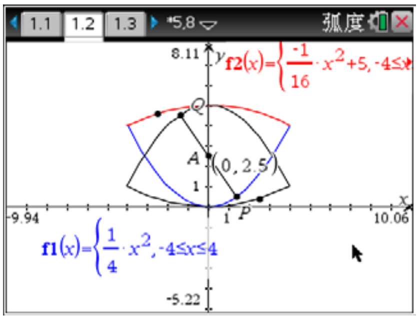
(2) 当$a=2.5$ 时 ，有二对好点；

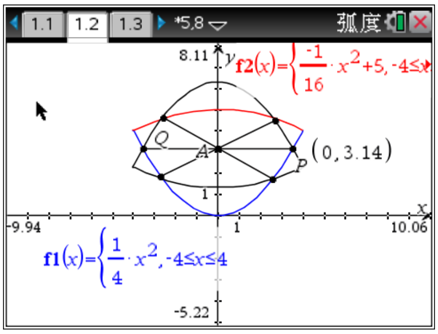
(3) 当$2.5<a<4$时，有三对好点；

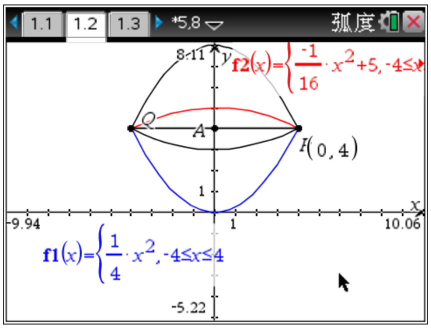
(4) 当$4\le a<5$时，有一对好点；

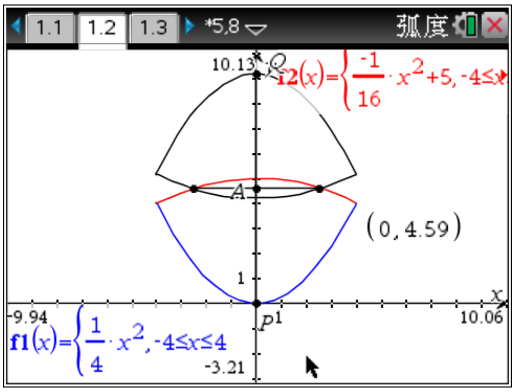
(5) 当$a\in(-\infty,0]\cup[5,+\infty)$，不存在好点.





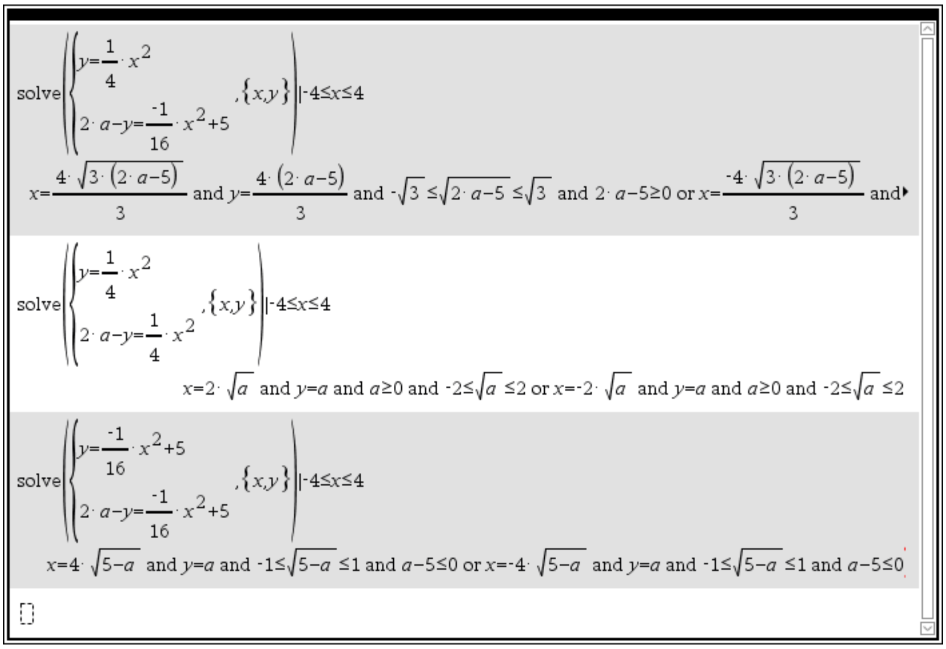






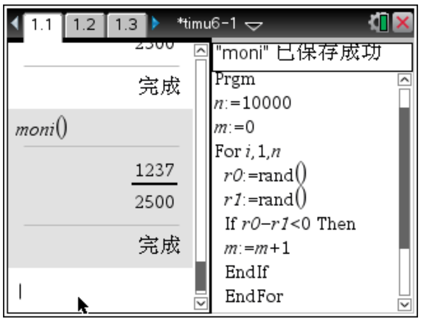
另解 2：

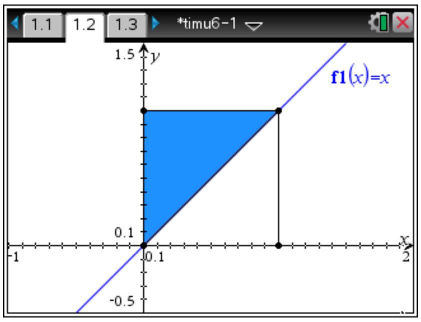
设 $P(x,y)$ 的曲线上，点 P 关于点 A 对称的点 $Q(-x,2a-y)$ 也在曲线上，则可通过解二元方程组进行分析：



6. **解析：**(1)直接编程模拟

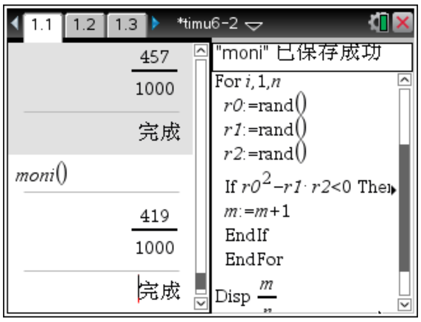
用几何概型解决，构造边长为 1 的正方形，将(r0, r1)看作是正方形内任一点，满足 r0< r1 的图形为阴影三角形，面积比为 0.5，即概率为 0.5

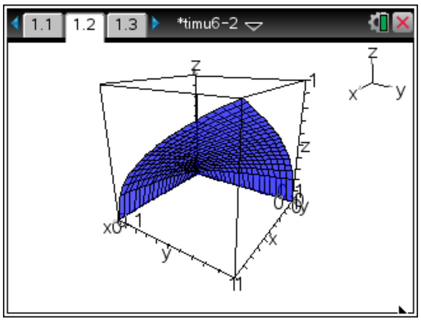




(2)直接编程模拟

用几何概型解决，构造边长为 1 的正方体，将(r0, r1, r2)看作是正方体内任一点，满足 $r_0^2<$ r1×r2 的几何体为曲面 $r_0^2=$ r1×r2 下面的部分，其体积比为 $\int_0^1\int_0^1\sqrt{xy}dydx=\frac{4}{9}$，即概率为 $\frac{4}{9}$





(3)直接编程模拟

类比正方体解决，$r_0^3 < r1 \times r2 \times r3$ 的概率为 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{xyz}\,dzdydx = \frac{27}{64}$，

7. **解析：**（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，并且与初始值无关;

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{M}}$

解法 1：(纯逻辑推理)

令 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=x$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{Ma_n+b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{b_n}+1}{\frac{Ma_n}{b_n}+1}$

得：$x=\frac{x+1}{M\cdot x+1}$，$Mx^2=1$，$\because M>0, \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{M}}$

不难证明，当 n 充分大之后，$a_n\cdot b_n>0$ ，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{M}}$.

解法 2：数学实验

思路 1：利用 CAS 的主要实验步骤如下：

Step1

Define $f(m,n)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ m & 1\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

Step2

令 $m=2$，$n=100, 200, 300, \cdots, 1000$ 分别计算 $f(m,n)$ 的值，即 $\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，

再分别计算$\frac{a_{100}}{b_{100}},\frac{a_{200}}{b_{200}},\frac{a_{300}}{b_{300}},\dots,\frac{a_{1000}}{b_{1000}}$，可以发现$\frac{a_n}{b_n}\to 0.707\approx\frac{1}{\sqrt{2}}$

Step3

令$m=4$，重复步骤 2 的操作，可发现：$\frac{a_n}{b_n}\to 0.500\approx\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{M}}$

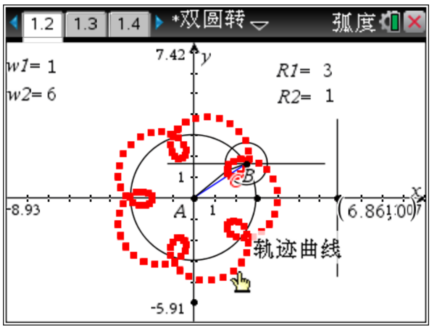
Step4

Define $f(m,n)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ m & 1\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}-1+2\cdot rand()\\ -1+2\cdot rand()\end{bmatrix}$，改变两数列的初始值，重复步骤 2 和 3，

得出结论：$\frac{a_n}{b_n}\to\frac{1}{\sqrt{M}}$(与初始值无关).

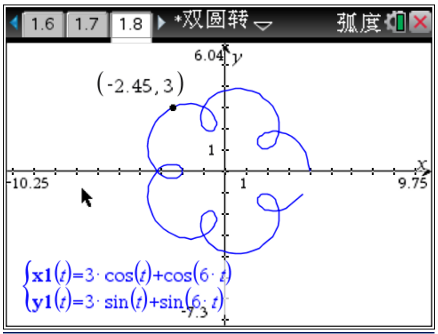
思路 2：利用电子表格，详见附件.

8.**解析**：（1）作图：可以按条件作出轨迹



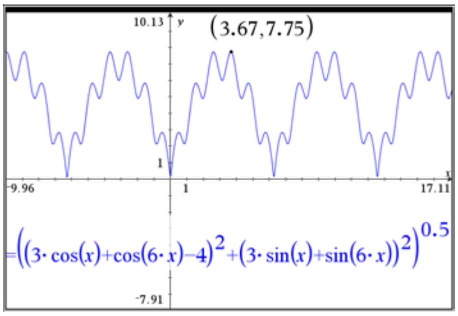
也可用方程表示：设 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，经过时间 t(s)后，向量$\overrightarrow{AB}$的坐标为$(3\cos t,3\sin t)$，向量$\overrightarrow{BC}$的坐标为$(\cos 6t,\sin 6t)$，则向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(3\cos t+\cos 6t,3\sin t+\sin 6t)$，即轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=3\cos t+\cos 6t,\\ y=3\sin t+\sin 6t,\end{cases}$$（t 为参数，且$t\in R$）。



（2）点 C 的起始点为（4，0），设任意一点 C$(3\cos x+\cos 6x, 3\sin x+\sin 6x)$，则

$$d=\sqrt{(3\cos x+\cos 6x-4)^2+(3\sin x+\sin 6x)^2}$$

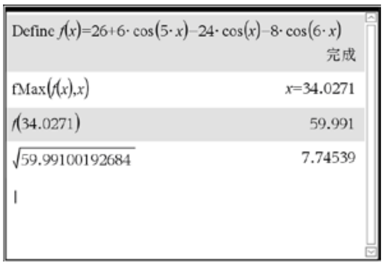


约为 7.75.

或化简后,得

$$f(x)=26+6\cos(5x)-24\cos(x)-8\cos(6x)$$

利用计算器计算



约为 7.75

9.**解析：**设月利率为 r,

若 25 岁投保，每月交 200 元，共交35×12个月，直到其 75 岁时，共产生的本利金为：

$$A=200(1+r)^{600}+200(1+r)^{599}+\cdots+200(1+r)^{181}=200\times\frac{(1+r)^{181}-(1+r)^{601}}{1-(1+r)}$$

其从 60 岁开始每月领取养老金 2282 元，则直到 75 岁共产生的本利金为

$$B=2282\left(1+r\right)^{180}+2282(1+r)^{179}+\cdots+2282(1+r)+2282=2282\times\frac{1-(1+r)^{181}}{1-(1+r)}$$

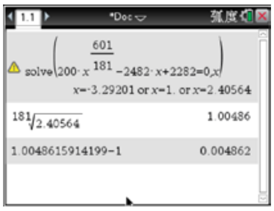
当 $A=B$ 时,解关于 r 的方程：$200\times\left[\left(1+r\right)^{181}-(1+r)^{601}\right]=2282\times\left[1-\left(1+r\right)^{181}\right]$

整理后即为

$$200\times\left(1+r\right)^{601}-2482\times\left(1+r\right)^{181}+2282=0$$

直接求解，耗尽资源也无法求解，需要进行转化：

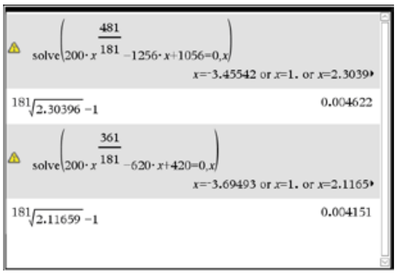
设 $x=(1+r)^{181}$ ，则原方程转化为:



即 $r\approx0.004862$.

同理可得,

若 35 岁投保,月利率约为 0.004622, 若 45 岁投保,月利率约为 0.004151.



若 45 岁投保，月养老金 420 元．则

解关于 r 的方程：$200\times\left[\left(1+r\right)^{181}-(1+r)^{361}\right]=420\times\left[1-\left(1+r\right)^{181}\right]$

10.**解析：**将 A、B、C、D、E、F 各点坐标输入电子表格，增加数据与统计页面，利用三次回归得：$y_1 = 4\times10^{-6}x^3 + 5.99\times10^{-4}x^2 - 0.114x + 1.83$

再将 G、H、I、J、K、L、M 各点坐标输入电子表格，增加数据与统计页面，利用二次回归得：$y_2 = -3.78\times10^{-4}x^2 + 0.194x + 6.27$

定义函数：$g(x) = \begin{cases} 4\times10^{-6}x^3 + 5.99\times10^{-4}x^2 - 0.114x + 1.83, & -400 \le x < 0 \\ -3.78\times10^{-4}x^2 + 0.194x + 6.27, & 0 \le x \le 300 \end{cases}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

解方程组：$\begin{cases} f(-238.4) = g(-238.4) \\ f(252.9) = g(252.9) \\ f'(-238.4) = g'(-238.4) \\ f'(252.9) = g'(252.9) \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a = 1.22\times10^{-8} \\ b = 3.23\times10^{-6} \\ c = -0.001 \\ d = 31 \end{cases}$

$\therefore f(x) = 1.22\times10^{-8}x^3 + 3.23\times10^{-6}x^2 - 0.001x + 31$

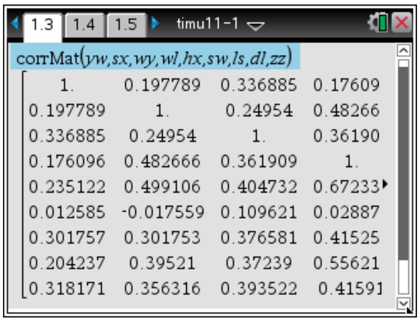
定义数列 $a_n = f(25n-25) - g(25n-25)$

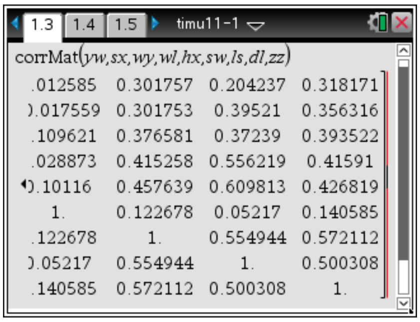
计算其前 11 项的和得 96 米。

说明：对于山坡截面的曲线拟合类型还是不要确定函数类型为好，一般情况可以选择多项式回归或三角回归，要评判有无回归精度的估计以确定答题者的回答水平。

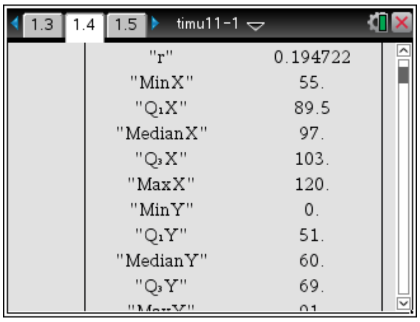
Comment [章建跃1]: 这个说明怎么考虑?

11. **解析：**(1) 剔除缺考的同学成绩，然后计算出相关系数矩阵，找出最大的系数为第 5 行，第 4 列的数 0.67233，表明物理化学相关程度最高。



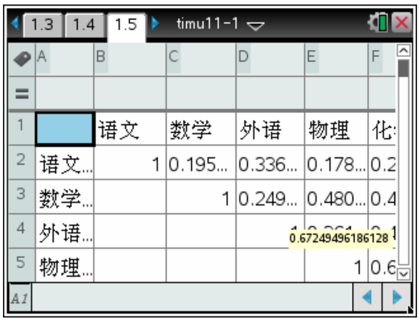


另外可以用双变量统计分别计算每两个变量的相关系数

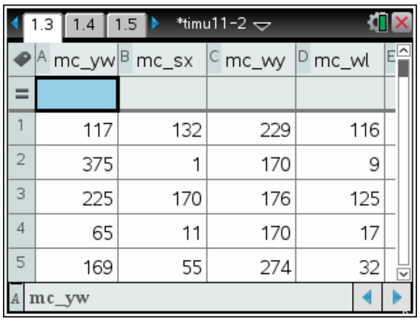


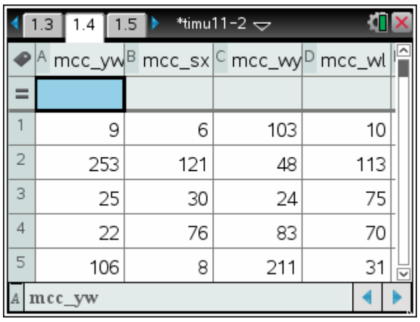
还可以用线性回归来分别计算每两个变量的相关系数

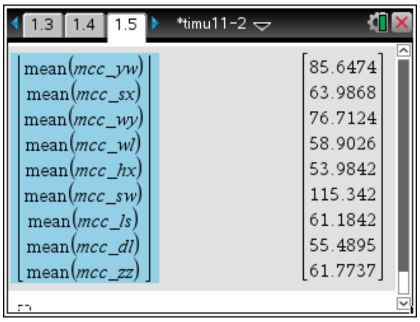
最后写出相关系数矩阵进行比较

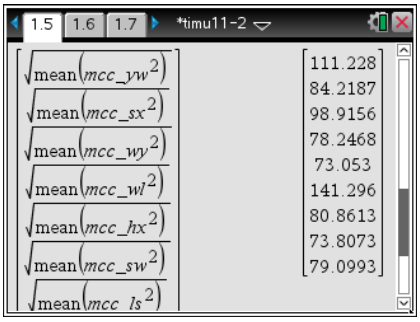


(2) 计算出每个人每科成绩和总分的名次，然后计算每科成绩名次与总分名次的差的绝对值，计算出每科名次差的平均值，发现生物学科名次差的平均值最大为 115.342，也可以计算每科名次差的平方和的平均值，再开放后得到名次差的另一种平均值，发现生物学科名次差的平均值最大为 141.296

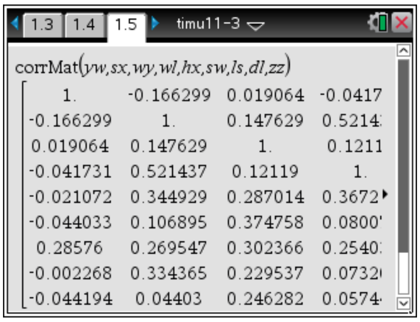


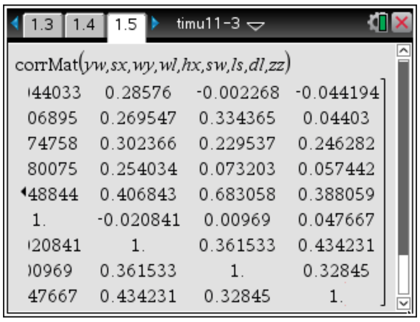




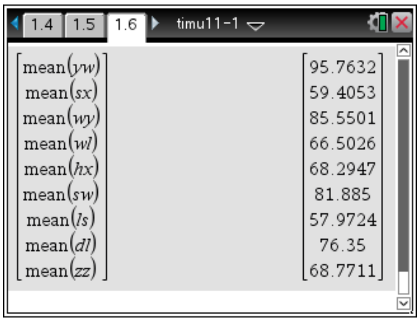


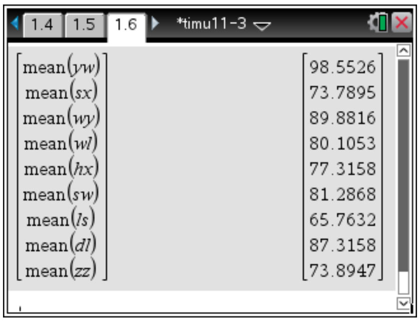
(3) 取出 1 班同学的成绩，然后计算出相关系数矩阵，找出最大的系数为第 5 行，第 8 列的数 0.683058，表明化学地理相关程度最高。显然和全体学生的成绩的相关性有所不同。





分别计算出全体学生成绩的平均分，再计算出 1 班学生的平均分，发现 1 班学生成绩远远高于总体的平均分，用一班同学作为样本估计总体会有很大的偏差。





12.**解析**:(1)假设每个座位能为航空公司带来的盈利为 X 元,则 X 的可能取值为 200,100,且 X 的分布列为:

X	200	100
P	0.9	0.1

所以 $E(X)=200\times0.9+100\times0.1=190$.

这样,从长远看,航空公司从这个航班上,平均能获利 $120\times190=22800$(元).

(2)试题提供的情境表明,这个航班按约登机的乘客人数 $X\sim B(130,0.9)$,当 X 超过 120 时,超出的乘客选择赔偿 500 元,而换乘当天其他航班的人数是随机的,而剩下的乘客将换乘次日同一航班,这样,次日同一航班按约登机的乘客人数需要加上前一个航班留下的乘客人数.因为情况较为复杂,所以我们采用随机模拟的方式进行估计,并取一年(365 天)的模拟数据进行估算.

添加一个列表与电子表格页面,在 A1 单元格,用命令“=randbin(130,0.9)”模拟产生一个随机整数,代表乘客人数 X,C1 单元格表示取消预约的乘客人数,在 D1 单元格,用命令“=iffn(A1>120,120,A1)”生成实际登机的乘客人数,当 $X>120$ 时,实际登机的人数为 120,否则与 A1 系统;E1 单元格表示登机乘客给公司带来的利润,F1 单元格表示取消预约的乘客给公司带来的利润,在 G1 单元格,用命令“=iffn(a1>120,a1-120,0)”生成因超额预定带来的无法登机的乘客人数,因此在 H1 单元格,用命令“=randint(0,G1)”产生当天乘坐另一航班的乘客人数,而剩下的乘客需要添加到第二天预约登机的乘客,所以,从第 2 行开始,B 列单元格需要将 A 列的乘客人数加上前一天留下的乘客数,最后用填充的方法模拟 365 天的数据,算出平均利润为 24296.7>22800,尽管这是一个估计值,但重复多天的随机模拟表明,这种“超额预定订”的措施能给航空公司带来额外的经济利益.


1.1
1.2
*未保存
G wy...
H dt
I cr
J lirun
K
1 1 0 1 23100 24296.7
2 0 0 0 24700
3 0 0 0 24000
4 0 0 0 24700
5 0 0 0 24500
K2