

Introdução ao cálculo diferencial II

Teorema de Bolzano

Extraído de:	
	
EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO Prova Escrita de Matemática A 12.º Ano de Escolaridade Decreto-Lei n.º 118/2012, de 3 de julho Prova 635/1.ª Fase 1.ª Fase Duração da Prova: 90 minutos. Tolerância: 30 minutos.	
2015	
VERSÃO 1	

Grupo II

(...)

4. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x+1) \ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

(...)

4.3. Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

Proposta de resolução

Para completar o primeiro tópico, teremos primeiro de justificar que a função f é contínua em $[1,e]$.

A função f é contínua em $[\frac{1}{2}, +\infty[$ pois resulta do produto de duas funções contínuas nesse intervalo. Como f é contínua em todo esse intervalo, podemos concluir que é contínua em $[1,e]$.

De seguida terá de determinar $f(1)$ e $f(e)$:

$$f(1)=(1+1) \cdot \ln(1)= 0$$

$$f(e)=(e+1) \cdot \ln(e)= e+1 \cong 3,718$$

Como a função f é contínua em $[1,e]$, e como $f(1) < 3 < f(e)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que, no intervalo $]1,e[$, existe pelo menos uma solução da equação $f(x)=3$.

Para determinar a solução da equação $f(x)=3$ em $[1,e]$, teremos de representar na calculadora gráfica o gráfico das duas funções de interesse à determinação da solução, $f_1(x)= (x+1) \cdot \ln(x)$ e $f_2(x)=3$.

Para a resolução deste tópico utilizámos a unidade portátil TI-Nspire CX. No entanto o procedimento é semelhante para qualquer unidade portátil TI-Nspire (Clickpad, Touchpad ou CX).

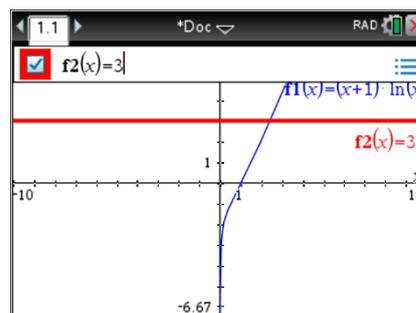
No menu inicial do TI-Nspire, acessível através da tecla \square (on), abre um novo documento (tecla \square) ou adiciona uma nova página com a aplicação Gráficos (segundo ícone).



Na linha de entrada, $f_1(x)=$ introduz $(x+1) \cdot \ln(x)$ e prime a tecla \square .

Clica de seguida na tecla \square e na linha de entrada $f_2(x)=$ introduz 3, voltando a premir a tecla \square .

Uma vez que a janela de visualização não é a adequada para visualizar o ponto de interseção dos dois gráficos, vamos ter de ajustar a janela clicando em \square , 4:Janela, 1: Definições da janela...



Matemática A

Exame 2015 1ª Fase V1

MATEMATICA A- 12º ANO

Em **X Min** coloca 1, em **X Máx:**e, em **Y Min:**0 e em **Y Máx:**5, finalizando com **enter**.

Na janela verás a interseção das duas curvas das quais se pretende determinar a interseção.

Para determinares o ponto de interseção tens de premir **menu**, **6:Analisar gráfico**, **4:Interseção**.

É solicitado o limite inferior (que fica à esquerda do ponto de interseção) que teremos de selecionar clicando em **enter** e posteriormente o limite superior (à direita do ponto de interseção) que selecionamos da mesma forma.

As coordenadas do ponto de interseção surgirão no ecrã **(2,41;3)**.

Deverás reproduzir o referencial, os gráficos e as coordenadas do ponto de interseção na tua folha e apresentar a resposta:

A solução da equação $f(x)=3$ em $[1,e]$ é **2,41**.

