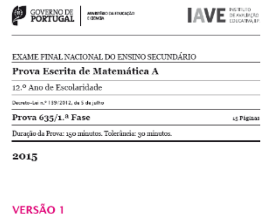
Matemática A
Exame 2016 1ª Fase V1

MATEMATICA A- 12º ANO

Extraído de:


GOVERNO DE PORTUGAL
IAVE
EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho
Prova 635/1.ª Fase — 15 Páginas
Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.
2015
VERSÃO 1

Introdução ao cálculo diferencial II

Teorema de Bolzano

Grupo II

(…)

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x<\dfrac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

(…)

4.3. Mostre que a equação $f(x)=3$ é possível em $]1,e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

Proposta de resolução

Para completar o primeiro tópico, teremos primeiro de justificar que a função f é contínua em [1,e].

A função f é contínua em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ pois resulta do produto de duas funções contínuas nesse intervalo. Como f é contínua em todo esse intervalo, podemos concluir que é contínua em [1,e].

De seguida terá de determinar f(1) e f(e):

$f(1)=(1+1)\,.\,\ln(1)=0$

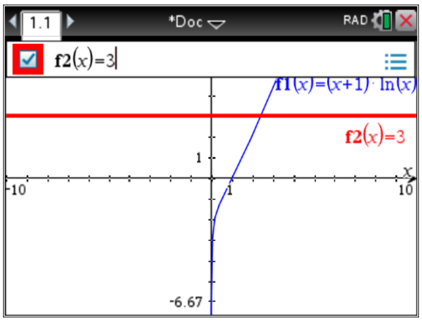
$f(1)=(e+1)\,.\,\ln(e)=e+1\cong 3{,}718$

Como a função f é contínua em [1,e], e como f(1) < 3 < f(e), podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que, no intervalo]1,e[, existe pelo menos uma solução da equação f(x)=3.

Para determinar a solução da equação f(x)=3 em [1,e], teremos de representar na calculadora gráfica o gráfico das duas funções de interesse à determinação da solução, f1(x)= (x+1).ln(x) e f2(x)=3.

Para a resolução deste tópico utilizámos a unidade portátil TI-Nspire CX. No entanto o procedimento é semelhante para qualquer unidade portátil TI-Nspire (Clickpad, Touchpad ou CX).

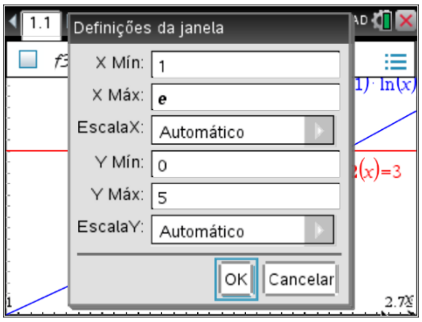
No menu inicial do TI-Nspire, acessível através da tecla [on], abre um novo documento (tecla [1]) ou adiciona uma nova página com a aplicação Gráficos (segundo ícone).



Na linha de entrada, *f1(x)=* introduz (x+1).ln(x) e prime a tecla [enter]. Clica de seguida na tecla [tab] e na linha de entrada *f2(x)=* introduz 3, voltando a premir a tecla [enter].

Uma vez que a janela de visualização não é a adequada para visualizar o ponto de interseção dos dois gráficos, vamos ter de ajustar a janela clicando em [menu], **4:**Janela, **1:** Definições da janela…

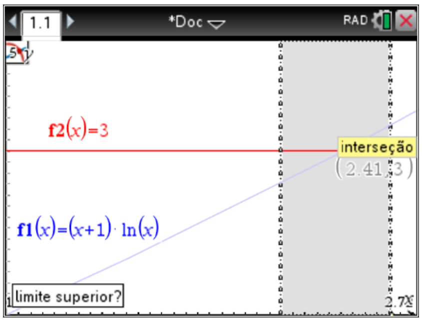
Em **X Min** coloca 1, em **X Máx**:e, em **Y Min**:0 e em **Y Máx**:5, finalizando com enter.



Na janela verás a interseção das duas curvas das quais se pretende determinar a interseção.

Para determinares o ponto de interseção tens de premir menu, **6:**Analisar gráfico, **4:**Interseção.

É solicitado o limite inferior (que fica à esquerda do ponto de interseção) que teremos de selecionar clicando em enter e posteriormente o limite superior (à direita do ponto de interseção) que selecionamos da mesma forma.



As coordenadas do ponto de interseção surgirão no ecrã **(2,41;3)**.

Deverás reproduzir o referencial, os gráficos e as coordenadas do ponto de interseção na tua folha e apresentar a resposta:

A solução da equação f(x)=3 em [1,e] é **2,41**.